ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ УРАВНЕНИЯМИ АВТОРЕГРЕССИИ

Ю. В. Меленец

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: melene@tut.by

Рассматривается задача представления временных рядов с периодическими вероятностными характеристиками уравнениями авторегрессии.

Ключевые слова: процесс авторегрессии, периодические вероятностные характеристики, оценивание параметров.

При обработке временных рядов часто выясняется, что в наблюдаемых реализациях проявляются более или менее регулярные колебания. В этом случае в качестве математической модели временного ряда выбирают, как правило, модель периодического тренда и случайной помехи. Но в такой модели наблюдения являются независимыми, а это есть сильное ограничение, которое необходимо преодолевать. Поэтому предлагаются другие подходы в описании таких временных рядов.

Пусть $\{X_t,\ t = 1, 2, \ldots\}$ – нестационарный случайный процесс, математическое ожидание и ковариации которого ограничены и являются периодическими функциями от времени t. Рассмотрим две возможности описания такого процесса уравнениями авторегрессии.

В первом случае предлагается уравнение авторегрессии вида

$$X_t = \sum_{k=1}^{n} a_k X_{t-k} + \xi_t, \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – постоянные коэффициенты, $a_n \neq 0,\ n > 1$; $\xi_t,\ t = 1, 2, \ldots,$ – стационарная последовательность случайных величин с $M\xi_t = 0$ и корреляционной функцией $R(\tau)$, удовлетворяющей условию $\sum_{\tau=0}^{\infty} |R(\tau)| < +\infty$. Уравнение $\sum_{m=0}^{n} a_m x^{n-m} = 0,\ \ a_0 = 1$ назовем характеристическим уравнением авторегрессии (1). Доказана следующая

Теорема. Пусть среди n различных корней характеристического уравнения имеется s пар комплексно-сопряженных корней с модулями, равными единице, и аргументами $\varphi_k,\ 1 \le k \le s,\ 2s \le n$. Пусть модули оставшихся $n - 2s$ корней меньше единицы. Для того, чтобы уравнению (1) удовлетворял временной ряд с периодическими вероятностными характеристиками с ограниченной при $t \to \infty$ дисперсией, необходимо и достаточно выполнение условий $g(\varphi_k) = 0,\ \ 1 \le k \le s$, где $g(z)$ есть спектральная плотность последовательности ξ_t.

Во втором случае предлагается рассматривать авторегрессию, параметры которой являются периодическими функциями:

$$X_t = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) X_{t-k} + \xi_t , \tag{2}$$

где $\xi_t, t = 1, 2, ...,$ – нестационарная последовательность независимых случайных величин с $M\xi_t = 0$, $D\xi_t = \sigma_t^2$, $\sigma_\tau^2 = \sigma_{\tau+jT}^2$; $a_k(\tau) = a_k(\tau + jT)$, $1 \le k \le n$, $1 \le \tau \le T$, $j = 1, 2, ...$; T – натуральное число, имеющее смысл периода.

Предполагается, что период T известен, и рассматривается задача оценивания nT коэффициентов $a_k(\tau)$, $1 \le k \le n$, $1 \le \tau \le T$, T дисперсий σ_τ^2, $1 \le \tau \le T$, в ситуации, когда ξ_t есть гауссовская последовательность.

Отметим, что задача оценивания коэффициентов $a_k(\tau)$ в модели (1) рассматривалась в [1]. Здесь использовалась система уравнений, аналогичных уравнениям Юла – Уолкера для стационарных авторегрессий с постоянными коэффициентами. Замена теоретических ковариаций на выборочные и решение получившейся системы относительно коэффициентов $a_k(\tau)$ давала оценки этих параметров. Но практическая реализация этой процедуры малоэффективна и требует асимптотически больших объемов выборки.

Для решения поставленной задачи применим метод максимального правдоподобия. Первые n элементов выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ считаем начальными значениями авторегрессии. Запишем плотность распределения случайных величин $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ..., \xi_N$ в виде:

$$(2\pi)^{\frac{n-N}{2}} \left(\prod_{t=n+1}^{N} \sigma_t \right)^{-1} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=n+1}^{N} \sigma_t^{-2} \xi_t^2 \right\}, \tag{3}$$

и перейдем в (3) от переменных $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ..., \xi_N$ к переменным $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_N$. Из (2) получаем, что якобиан этого преобразования равен 1, и совместная плотность значений $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_N$ есть:

$$f\left(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_N = x_n / \left\{ a_k(\tau), \sigma_\tau^2, 1 \le \tau \le T, 1 \le k \le n \right\} \right) =$$

$$= (2\pi)^{\frac{n-N}{2}} \left(\prod_{t=n+1}^{N} \sigma_t \right)^{-1} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=n+1}^{N} \sigma_t^{-2} \left(x_t - \sum_{k=1}^{n} a_k(t) x_{t-k} \right)^2 \right\}. \tag{4}$$

Введем обозначения: $\alpha_T = \left[\dfrac{N-n}{T} \right]$ – целое число циклов, содержащихся в наблюдаемой реализации $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_N$; $N - n = \alpha_T T + \beta_T$, $0 \le \beta_T < T$;

$$m_t = \begin{cases} \alpha_T + 1, & 1 \le t \le \beta_T \\ \alpha_T, & \beta_T < t \le T \end{cases}.$$

Из (4) и введенных обозначений следует, что логарифм функции правдоподобия оцениваемых параметров записывается в виде:

$$\begin{gathered} l\left(\left\{ a_k(\tau), \sigma_\tau^2, 1 \le \tau \le T, 1 \le k \le n \right\} \right) = \frac{n-N}{2} \ln 2\pi - \sum_{\tau=1}^{T} \sum_{j=1}^{m_\tau} \sigma_{n+\tau+(j-1)T} - \\ -\frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^{T} \sum_{j=1}^{m_\tau} \sigma_{n+\tau+(j-1)T}^{-2} \left(x_{n+\tau+(j-1)T} - \sum_{k=1}^{n} a_k\left(n + \tau + (j-1)T \right) \cdot x_{n+\tau+(j-1)T-k} \right)^2 . \end{gathered} \tag{5}$$

Используя (5) и свойства периодичности параметров $\left\{ a_k(\tau), \sigma_\tau^2 \right\}$, получаем, что задача оценивания совокупности этих параметров распадается на T однотипных задач. При фиксированном значении τ, $1 \le \tau \le T$, оценки коэффициентов $a_k(\tau)$, $1 \le k \le n$, находятся как решение задачи:

$$\sum_{j=1}^{m_\tau}\left(x_{n+\tau+(j-1)T} - \sum_{k=1}^{n} a_k\left(n+\tau\right)\cdot x_{n+\tau+(j-1)T-k}\right)^2 \to \min_{\{a_k(\tau)\}}, \qquad (6)$$

а оценка $s^2_{\tau+n}$ дисперсии $\sigma^2_{\tau+n}$ по найденным оценкам $\hat{a}_k(\tau)$ определяется по следующей формуле:

$$s^2_{\tau+n} = \frac{1}{m_\tau - 1}\sum_{j=1}^{m_\tau}\left(x_{n+\tau+(j-1)T} - \sum_{k=1}^{n} \hat{a}_k\left(n+\tau\right)\cdot x_{n+\tau+(j-1)T-k}\right)^2. \qquad (7)$$

Решение задачи (6) записывается в виде:

$$A_\tau = \left(Z^*_\tau Z_\tau\right)^{-1} Z^*_\tau X_\tau, \qquad (8)$$

где обозначено:

$A_\tau = \left[\hat{a}_k(n+\tau), 1 \le k \le n\right]^*$, $X_\tau = \left[x_{n+\tau+(j-1)T}, 1 \le j \le m_\tau\right]^*$, $Z_\tau = \left\| x_{n+(i-1)T+\tau-j}, 1 \le i \le m_\tau, 1 \le j \le n \right\|$.

Для исследования свойств оценок (7) и (8) введем в рассмотрение матрицу $B(r) = \left\| b_{ij}(r) \right\|$, $1 \le i, j \le T$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} r^n, i = j, \\ -a_{i-j}(i) r^{n-(i-j)}, i > j, \\ -a_{T+i-j}(i) r^{n-(T+i-j)}, i < j, \end{cases}$$

и предположим, что корни уравнения $\det B(r) = 0$ ограничены по модулю единицей. Для этого случая в [2] показано, что

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j(t)\xi_{t-j}, \qquad (9)$$

где коэффициенты $\delta_j(t)$ периодичны по t с периодом T и ряд в правой части (9) сходится в среднеквадратическом смысле. При выполнении (8) доказано, что оценки (7) и (8) являются состоятельными. Доказательство проводится аналогично тому, как это делается для стационарных авторегрессий с постоянными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pagano, M. J.* On periodic and multiple autoregressions / M. J. Pagano // The Annals of Statistics. 1988. V. 6. № 1. P. 1310–1317.

2. *Troutman, B. M.* Some results in periodic autoregressions / B. M. Troutman // Biometrica. 1989. V. 66. № 2. P. 219–228.